Biến đổi Fourier nhanh phân thời gian(FFT)

1. Định nghĩa

Thuật toán tính nhanh biến đổi Fourier rời rạc dựa trên việc phân dãy x(n) thành các dãy con có chiều dài ngắn hơn được gọi là thuật toán biến đổi Fourier nhanh phân thời gian.

Để minh họa thuật toán này trước hết chúng ta nghiên cứu trường hợp đặc biệt mà

N =

(N là chiều dài của dãy x(n)).

2. Thuật toán FFT phân thời gian trong trường hợp N =

2.1. Thủ tục tổng quát

Nếu N = , thì N sẽ là một số nguyên chẵn.

Vậy chúng ta có thể phân chia dãy thành hai dãy có chiều dài là hai dãy như sau:

- Dãy thứ nhất được hình thành bởi các giá trị chẵn.

- Dãy thứ hai được hình thành bởi các giá trị lẻ.

Về mặt toán học ta có thể viết hai dãy này như sau: và

Vậy ta có thể viết :

= (0)

= + (0)

= +

= +

Chúng ta đặt :

= x(2r)=g(r) 0k-1

= x(2r+1)= h(r) 0k-1

Ở đây: x(2r)=g(r)

x(2r+1)=h(r)

=> = + với 0N-1và =0 với k còn lại ( 10.3.2.1)

Hoặc ta có thể viết :

= + (10.3.2.2)

Ở đây:

là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài

là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài

và:

là biến đổi Fourier rời rạc của các mẫu lẻ của x(n)

là biến đổi Fourier rời rạc của các mẫu chẵn của x(n)

Như vậy các phép toán được tiến hành với và chỉ trong khoảng 0k-1

tức là:

0 với 0k-1 và =0 với k còn lại

0 với 0k-1 và =0 với k còn lại

0 với 0k-1 và =0 với k còn lại

Như thế thực chất là ta đã phân một DFT có chiều dài N ra thành 2 DFT có chiều dài .

Để thuận lợi chúng ta ký hiệu:

: là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài N.

: là biến đổi Fourier rời rạc có chiều dài

Ví dụ 10.3.2.1

Giả sử cho chiều dài cửa DFT là N=8, hãy trình bày thuật toán FFT phân thời gian để phân đôi DFT này. sau đó dùng đồ hình có hướng để minh họa thuật toán này cho rõ ràng hơn.

Giải

Áp dụng biểu thức (10.3.2.1) trong trường hợp N=8 chúng ta có thể viết:

= +

= +

= +

= +

= +

= +

= +

= +

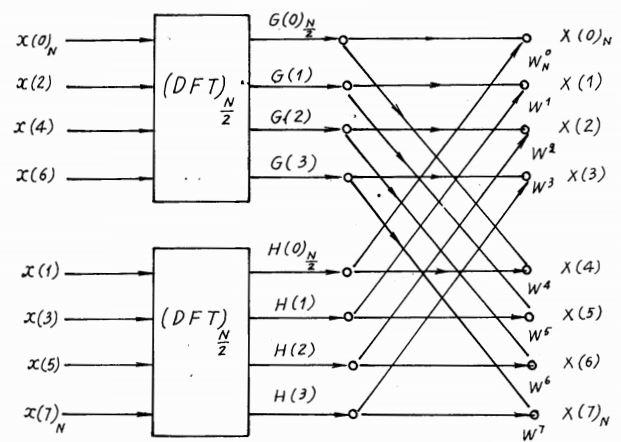
Chú ý rằng nếu thay các giá trị của k từ 0 đến 7 vào biểu thức (10.3.2.1) ta sẽ thấy xuất hiện các giá trị ,,,,,,,nhưng các giá trị này không tồn tại vì chiều dài của , chỉ có từ 0 đến 3. Vậy các giá trị sẽ vòng vào trong khoảng từ 0 đến 3 như sau:

Đồ hình có hướng để minh họa thuật toán này được cho trên hình 10.3.2.2 sau đây.

Bây giờ chúng ta sẽ đánh giá hiệu quả của phép phân một DFT có chiều dài là N thành hai DFT có chiều dài là .

Việc đánh giá hiệu quả này dựa trên cơ sở việc so sánh số lượng các phép tính số học cần phải thực hiện của cách tính trực tiếp và phân thành hai .

Chúng ta đã biết cách tính toán N mẫu của đòi hỏi số lượng các phép toán có phép tính thức (tức là có phép nhân phức và phép cộng phực ).



Như vậy để tính chúng ta phải đòi hỏi phép cộng phức. Để tính toán , tương tự chúng ta phải đòi hỏi phép tính phức.

Để kết hợp và , theo biểu thức (10.3.2.1) chúng ta phải thực hiện phép toán nhân phức (k chạy từ 0 đến N-1), tức là chúng ta phải thực hiện N phép nhân phức. Ngoài ra chúng ta còn cần phải thực hiện phép toán: + , tức đòi hỏi N phép cộng phức.

Tóm lại, để tính toán bằng cách phân thành và , theo biểu thức (10.3.2.1) chúng ta cần số lượng các phép tính phức như sau:

N+2phép nhân phức

N+2phép cộng phức.

Cuối cùng ta có thể nói rằng để tính toán N mẫu của thì số lượng phép tính phức cần thực hiện là: phép.

Ví dụ 10.3.2.2

Hãy tính hiệu quả của FFT với N=8. Khi phân thành hai

Giải:

Nếu tính trực tiếp ta cần thực hiện số phép tính là phép:

N=8 = 64 phép.

Nếu phân thành và thì số phép tính cần thực hiện là phép:

N=8 = 8+2=40

Vậy số phép tính tiết kiệm được là: 64 - 40 = 24 phép.

Nhận xét:

+ Khi N rất lớn thì 2tức là khi N rất lớn thì số phép toán cần thực hiện sẽ giảm rõ rệt.

+ Bởi vì N= = Để nâng cao hiệu quả hơn nữa, chúng ta lại chia thành hai